CALCOLO E PROGETTAZIONE DI FILTRI NUMERICI
MEDIANTE TRASFORMATA VELOCE DI FOURIER

M.R. ATTOLINI, S. CECCHINI
Laboratorio TE.S.R.E. del C.N.R. - Bologna

M. GALLI
Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

Rapporto Interno n. 88

Nota Scientifica - Dicembre 1976

RIASSUNTO:

Viene proposto un metodo pratico di filtraggio numerico che può essere molto più veloce di quello tradizionale della media mobile pesata. Secondo questo metodo la risposta in frequenza del filtro si può approssimare molto bene a quella ideale pur rimanendo molto contenuto il numero dei coefficienti e quello dei termini transitori.

INTRODUZIONE

Per una data serie di N dati reali o complessi

$$\{x_k; k=0,1,\ldots\ldots,N-1\}$$

si può sempre definire una nuova serie X_h di N dati tale che:

$$\{X_h = X(h/N) = F^-\{x_k\} = \sum_{0}^{N-1}{}_k\, x_k e^{-i2\pi kh/N}; h=0,1,\ldots,N-1\} \tag{1}$$

e

$$\{x_k = F^+\{X_h\} = 1/N \sum_{0}^{N-1}{}_h\, X_h e^{+i2\pi hk/N}; k=0,1,\ldots,N-1\} \tag{2}$$

dove gli operatori $F^-\{\cdot\}$ e $F^+\{\cdot\}$ vengono rispettivamente chiamati trasformata ed antitrasformata discreta di Fourier della serie.

Si può subito osservare che la $\{X_h\}$ contiene tutta la informazione di $\{x_k\}$ e che a sua volta la $\{x_k\}$ contiene tutta la informazione di $\{X_h\}$; infatti dalla X_h si possono ricavare tutte le x_k e viceversa, in corrispondenza biunivoca.

Se k si può intendere come variabile temporale e x_k come la k-esima campionatura successiva ad intervalli Δt di una funzione continua x(t), allora X_h rappresenta la h-esima campionatura successiva ad intervalli $\Delta f=1/(N\Delta t)$ di una funzione della frequenza X(f) che in generale <u>non è</u> la trasformata di Fourier (TF) di x(t). Tutt'al più si può dire che X_h è una campionatura della trasformata "aliasata" su $\Delta t=1$ della x(t) e che x_k è una campionatura della antitrasformata "aliasata" su $\Delta f=1/(N\Delta t)$ della X(f) dove però la X(f) non è in generale la TF di x(t). Le X_h sono semplicemente le ampiezze della scomposizione di $\{x_k\}$ in funzioni armoniche.

Se N non è primo e massimamente se è una potenza di 2, allora $\{X_h\}$ si può calcolare rapidamente da $\{x_k\}$ e viceversa, mediante l'algoritmo della trasformata veloce di Fourier (TVF)[1]. Se N è un certo numero di unità di tempo allora f=h/N indica la frequenza di h cicli per N unità di tempo.

Se $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ sono due serie di N dati, allora vale per le loro trasformate $\{X_h\}$ e $\{Y_h\}$, l'analogo del teorema della convoluzione per le funzioni continue e le loro trasformate:

Se

$$\{z_k\}=\{x_k\}*\{y_k\}$$

e

$$\{X_h\}=F^{-}\{x_k\};\{Y_h\}=F^{-}\{y_h\};\{Z_h\}=F^{-}\{z_k\}$$

allora

$$\{Z_h\}=\{X_h\}\cdot\{Y_h\} \qquad \text{(v. Appendice)}$$

FILTRAGGIO NUMERICO

Intendiamo con questa espressione l'operazione mediante la quale da una serie $\{x_k; k=0,1,\ldots\ldots,N-1\}$ e una serie $\{g_k; k= =-M_1,\ldots\ldots-1,0,1,\ldots\ldots,M_2\}$ detta dei coefficienti del filtro, si ottiene la serie

$$\{x'_k = \sum_{-M_1}^{M_2}{}_{k'} \; x_{k+k'}g_{k'} \; ; k=0,1,\ldots\ldots\ldots,N-1\}.$$

$\{x'_k\}$ si può anche intendere come ottenuta mediante una media mobile pesata con pesi $\{g_k\}$, operata su $\{x_k\}$.

Poichè la serie $\{x_k\}$ non ha termini per $k<0$ e $k\geq N$ i primi M_1 termini e gli ultimi M_2 termini di $\{x'_k\}$ non si possono definire a meno che tutti i termini di $\{x_k\}$ per $k<0$ e $k\geq N$ si possano considerare nulli; in questo caso chiameremo <u>transitori</u> i termini suddetti.

Oltre che con il metodo della media mobile il filtraggio di $\{x_k\}$ si può ottenere anche profittando del teorema della convoluzione visto sopra. Basta allora costruire la serie

$$\{g'_k;\ k=0,1,\ldots\ldots\ldots,N-1\}$$

ottenuta da $\{g_k\}$ (v. fig.1)

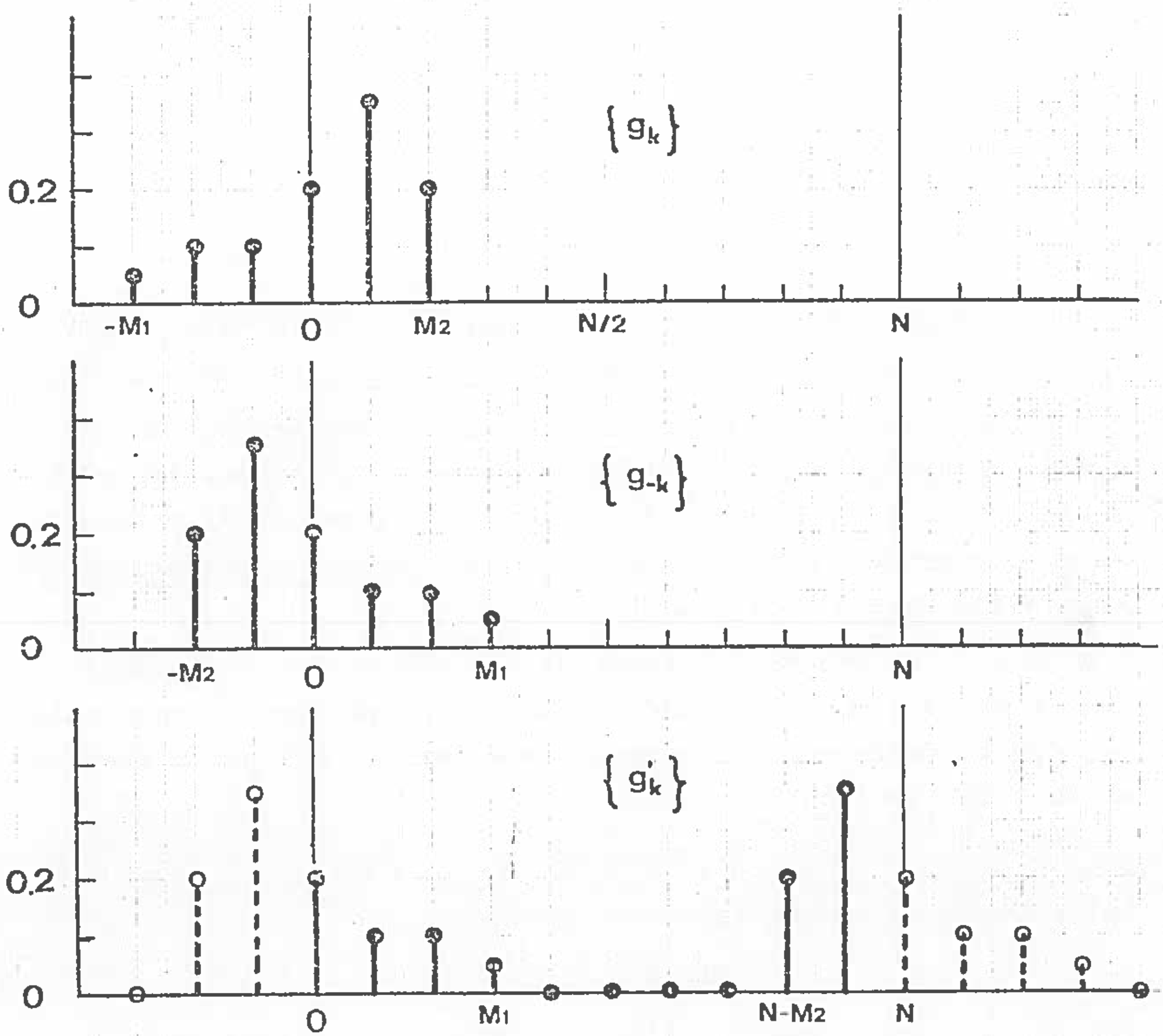

Fig. 1 - Esempio di serie di coefficienti $\{g_k\}$ per filtraggio con media mobile pesata; $\{g_{-k}\}$ è la risposta in impulso del filtro e $\{g'_k\}$ è l'insieme dei coefficienti richiesto per il filtraggio via TVF.

a) invertendo(+) l'ordine dei coefficienti rispetto l'indice 0, ottenendo così $\{g_{-k}\}$, detta anche risposta in impulso del filtro

b) e aggiungendo N a tutti gli indici negativi della serie $\{g_{-k}\}$, ossia scivolando di N posti tutti i coefficienti di indice negativo, ottenendo così $\{g'_k\}$ e

c) calcolare infine

$$\{x'_k\}=F^+\{X'_h\}=F^+\{X_h\cdot G_h\}=F^+\{F^-\{x_k\}F^-\{g'_k\}\} \qquad (3)$$

La serie $\{G_h\}$, che moltiplicata per $\{X_h\}$ dà la trasformata $\{X'_h\}$ della serie filtrata, dicesi risposta in frequenza del filtro.

A causa della corrispondenza periodica già menzionata tra $\{x_k\}$ e $\{X_h\}$, deriva che $\{x'_k\}$ conterrà sempre M_1 termini transitori all'inizio e M_2 termini transitori alla fine eguali a quelli che si otterrebbero con la media mobile, ripetendo periodicamente la serie data. (v. fig. 2).

Per un confronto dei tempi di esecuzione del filtraggio con il primo o con il secondo metodo si potrà tenere conto solo del numero delle moltiplicazioni necessarie. Nel primo caso esse sono all'incirca

$$(M_1+M_2+1)N$$

nel secondo caso esse sono all'incirca

$$3N\lg_2 N+N$$

poichè ogni TVF implica all'incirca $N\lg_2 N$ moltiplicazioni(2). Si vede subito che il filtraggio via TVF è più conveniente per N non troppo alto ma per un numero grande di coefficienti del filtro, ossia tutte le volte che $N<2^{(M_1+M_2)/3}$.

(+) Notare che la convoluzione discreta è l'analogo di quella continua nella quale però la somma è fatta per intervalli di tempo unitari anzichè infinitesimi; ne consegue che nella convoluzione discreta le moltiplicazioni termine a termine si devono fare con i termini di g_k in ordine invertito.

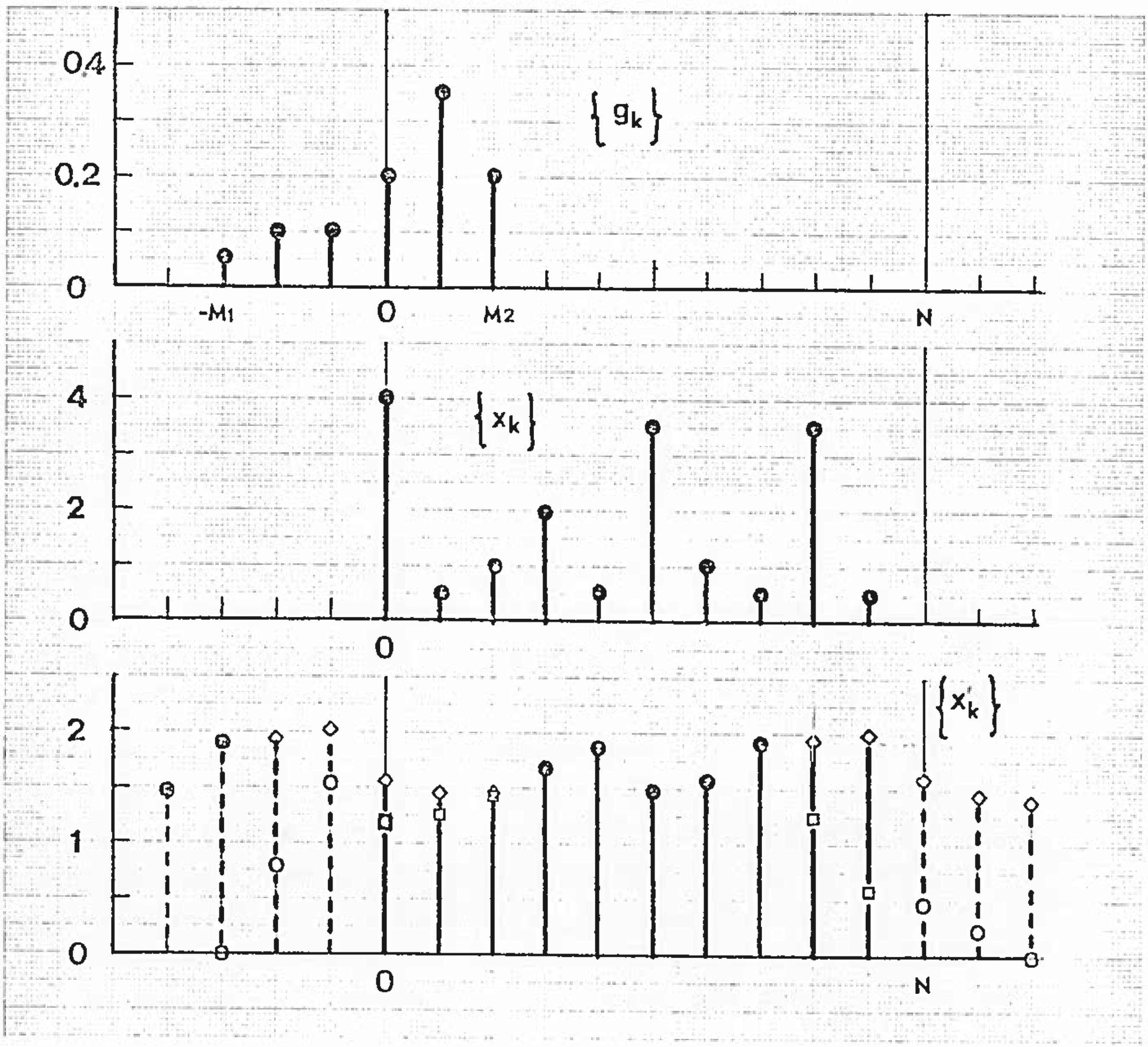

Fig. 2 - Un esempio di filtraggio con media mobile pesata e mediante TVF: $\{g_k\}$è la serie dei coefficienti; $\{x_k\}$ è la serie dei dati da filtrare; $\{x'_k\}$rappresenta la serie filtrata.

(□) termini transitori ottenuti con media mobile

(◇) termini transitori ottenuti mediante TVF.

Per es.: se $M_1=M_2=30$ il metodo via TVF sarà conveniente per $N \lesssim 10^6$ dati; mentre per $M_1=M_2=15$ il metodo via TVF sarà conveniente solo per $N \lesssim 1000$ dati.

In tav. I e II viene mostrato il risultato di un calcolo col metodo della media mobile e con quello della TVF; notare la diversità dei termini transitori.

PROGETTAZIONE DI UN FILTRO DI DATA RISPOSTA (+)

Ciò che spesso si richiede da un filtro è di far passare certe componenti armoniche nelle quali si può scomporre la serie data, con ampiezza ridotta ad una certa frazione, e senza variazione di fase.

Se $\{x_k\}$ è reale allora $\{ReX_h\}$ e $\{ImX_h\}$ sono rispettivamente funzioni simmetriche ed antisimmetriche rispetto l'indice zero. L'ampiezza della componente sinusoidale relativa alla frequenza h/N è data da $|X_h|$ e la sua fase $\phi=\text{arctg}(ImX_h/ReX_h)$.

Sia G(f) la risposta desiderata. Qui occorre fare alcune precisazioni. Anzitutto G(f) può essere definita soltanto per le N frequenze discrete $\{f=0,1/N,......,N-1/N\}$, infatti, per la corrispondenza biunivoca delle trasformate discrete, X'_h e X_h possono essere definite <u>solo</u> per le suddette frequenze, dunque avremo a che fare con la serie $\{G_h=G(h/N);h=....-1,0,1.....\}$. Inoltre, a causa del fatto che $\{x_k\}$ si può considerare una funzione discreta di <u>t</u> corrispondente ad una campionatura ad intervalli unitari, di una ipotetica x(t), G(h) dovrà essere periodica con periodo 1; di conseguenza G(h) sarà interamente nota se la conosciamo per un periodo:

$$\{G_h=G(h/N);h=-N/2+1,.....,-1,0,1,.....N/2-1;N \text{ pari}\}$$

(+) Per altre notizie sul filtraggio numerico v. L.H. Koopmans: The spectral analysis of time series. Academic Press. New York 1974. Chapter 6.

TAV. I

{k}	$\{g_k\}$	$\{x_k\}$	$\{x'_k\}_{mm}=\{\sum_{M_2}^{M_1} x_{k+i}g_i\}$
$-M_1$	0,05	(0)	(0)
-2	0,1	(0)	(0,8)
-1	0,1	(0)	(1,5)
0	0,2	4	{1,175}
1	0,35	0,5	{1,25}
M_2	0,2	1	{1,45}
3		2	1,625
4		0,5	1,85
5		3,5	1,45
6		1	1,575
7		0,5	1,9
8		3,5	{1,2}
9		0,5	{0,55}
N		(0)	(0,425)
11		(0)	(0,225)
12		(0)	(0,025)
13		(0)	(0)

TAV. II

$\{k\}$	$\{g_k\}$	$\{g_{-k}\}$	$\{g'_k\}$	$\{x_k\}$	$\{x'_k\}_{TVF}=\{g'_k\}*\{x_k\}$
$-M_1$	0,05		(0)	(0,5)	(1,9)
-2	0,1	0,2	(0,2)	(3,5)	(2.)
-1	0,1	0,35	(0,35)	(0,5)	(2,05)
0	0,2	0,2	0,2	4	{1,6}
1	0,35	0,1	0,1	0,5	{1,475}
M_2	0,2	0,1	0,1	1	{1,475}
3		0,05	0,05	2	1,625
4			0	0,5	1,85
5			0	3,5	1,45
6			0	1	1,575
7			0	0,5	1,9
8			0,2	3,5	{2}
9			0,35	0,5	{2,05}
N			(0,2)	(4)	(1,6)
11			(0,1)	(0,5)	(1,475)
12			(0,1)	(1)	(1,475)

oppure $\{G_h = G(h/N); h=0,1,\ldots.N-1\}$

Dunque se verrà indicato che $G(f)$ debba avere ad esempio l'andamento di fig.3a),si intenderà che, relativamente ad una serie di N dati, G_h dovrà avere la forma di fig.3b) e che G_h possa venire specificato o come in fig.3c) o come in fig.3d). Dunque per una specificazione di $G(f)$ continua, $\{G_h\}$ risulterà dipendente da N, sebbene questa dipendenza il più delle volte risulterà irrilevante.

Poichè ci è più comodo considerare le frequenze nell'intervallo (0,1), G_h lo specificheremo secondo l'indicazione di fig. 3d). Data una certa $G(f)$ con cui operare su N dati, i coefficienti del filtro corrispondente potranno essere ottenuti agevolmente calcolando

$$\{g'_k\} = F^+\{G_h\}$$

poichè $G(f)$ si suppone reale, $\{g'_k\}$ così ottenuta risulterà periodica di periodo 1, e simmetrica rispetto all'indice zero.$\{g_k\}$ poi si otterrà spostando di N posti verso sinistra i termini di $\{g'_k\}$con indice

$$\{k=N/2+1, N/2+2, \ldots., N-1\}$$

In generale, però, risulterà che $\{g'_k\}$e quindi $\{g_k\}$ sono costituite da un numero N termini non nulli pari al numero dei dati, sicchè si potranno avere due cose indesiderabili:

1) la $\{x'_k\}$ è formata da troppi termini transitori;
2) il numero dei coefficienti del filtro è troppo grande sicchè il calcolo mediante la media mobile risulta troppo laborioso.

Questi due inconvenienti si possono eliminare contemporaneamente mediante "l'appuntimento" (tapering) dei coefficienti del filtro.

Si voglia ad es. che i termini transitori siano al massimo

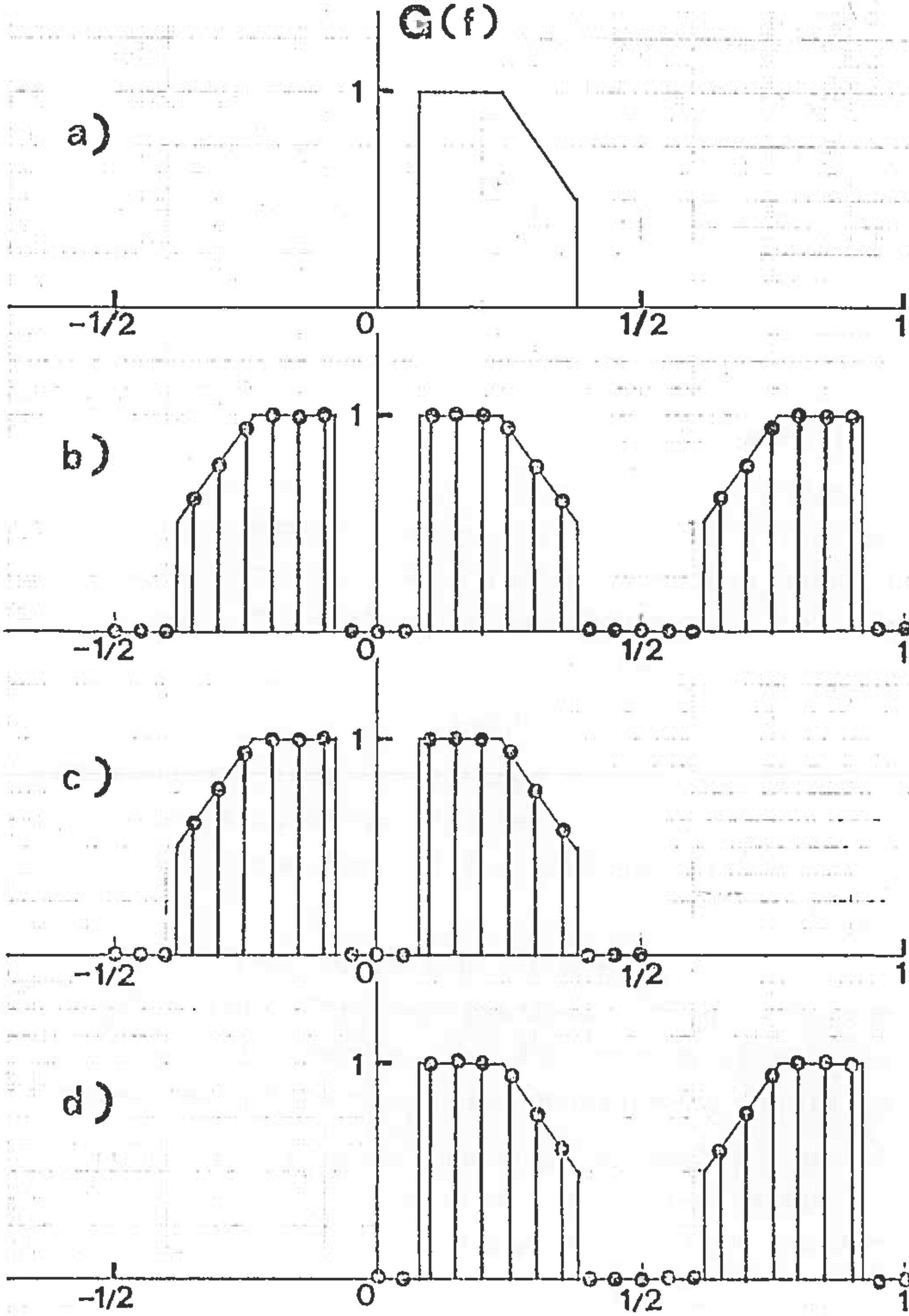

Fig. 3 - Un esempio di determinazione della serie delle frequen
ze corrispondenti a una certa risposta ideale G(f).
Il numero N delle frequenze tra 0,1 può essere qualsia
si, ma è evidente che G(f) risulta meglio definita da
un N grande.

a) risposta ideale proposta, G(f)
b) forma periodica della serie $\{G_h\}$
c) serie della risposta in frequenza nel campo $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
d) serie della risposta in frequenza nel campo (o,1).

2M+1. Basterebbe allora azzerare i restanti (N-2M)termini del filtro $\{g'_k\}$ centrati in N/2; ciò equivarrebbe allora a moltiplicare $\{g_k\}$per $\{d_{o,k}\}$ essendo sempre $d_{o,k}=1$ tranne che per $M+1<|k|<N/2$. Ciò però porterebbe ad una ondulazione sovrapposta alla forma desiderata della risposta, con il risultato di far passare parte di frequenze indesiderate e di alterare le ampiezze proposte: infatti ciò risulta chiaro quando si pensi che nella equazione

$$F^{-}\{g'_k\}.\{d_{o,k}\}=\{G_{o,h}\}*\{q_{o,M,h}\}=\{G_h\}$$

la serie

$$\{q_{o,M,h}\}=\{q_{o,M}(h/N)\}=\{[\sin(2M+1)\pi h/N]/(\sin\pi h/N);h=0,1,\ldots,N-1\}$$

ha delle oscillazioni intorno allo zero che arrivano fino a $\sim$il 20%.

Se invece di interrompere $\{g_k\}$ non così bruscamente come avverrebbe con $\{d_{o,k}\}$la si interrompe con una $\{d_k\}$che le lasci però un certo appuntimento, si può ottenere una adeguata attenuazione della ondulazione della risposta, che però andrà a discapito della rapidità con cui la risposta calcolata tende a seguire la risposta ideale.

Sono state proposte molte funzioni di "appuntimento" che risultano poi essere anche le finestre dei ritardi del calcolo della densità spettrale di potenza(2).

Noi qui proponiamo quella di Hamming che indicheremo con $\{d_{3,M,k}\}$

$$d_{3,M,k}=\begin{cases}(25+21\cos\pi k/M)/46 & \text{per } k = 0,\pm1,\ldots,\pm M\\[2ex] 0 & \text{per } M<|k|\leq N/2\end{cases}$$

la cui TDF è data da

$$\{q_{3,M,h}=21/92\ q_{o,M}(h/N-\tfrac{1}{2}/M) + 25/46\ q_{o,M}(h/N) + 21/92 q_{o,M}(h/M+\tfrac{1}{2}/M)\ ;\ |h|=0,1,\ldots,N/2\}\ (*)$$

Questa presenta un massimo per h=0, ha il primo zero per $h/N=2/(2M+1)$ e l'ampiezza della sua prima ondulazione è ~1/200 del massimo principale. Si vede quindi facilmente, pensando alla convoluzione di $\{G_{o,h}\}$ per $\{q_{3,M,h}\}$ che l'annullamento di $\{G_h\}$ si sposta dalla parte di G(h) nullo di una quantità pari all'incirca $2/(2M+1)$, e che l'intervallo del raccordo con 0 non supera $4/(2M+1)$. Si trova poi che il potere cancellante del filtro o il suo potere passante fuori dalla suddetta banda di raccordo è migliore di 1/400. Vedi fig. 4.

La fig. 4 mostra la tipica risposta di un filtro passa banda ($f_1=1/5$ e $f_2=1/3$) i cui coefficienti sono stati "appuntiti" a M=30 termini con la finestra di Hamming; ciò equivale all'imposizione che il numero dei termini transitori non superi 2M=60, che la banda di raccordo sia contenuta entro 1/5 e che l'ondulazione residua non superi 1/400.

CONCLUSIONI

Data una serie $\{x_k\}$ di N (pari) dati supposti equidistanziati dell'unità di tempo, se si vogliono i coefficienti di un filtro la cui risposta ideale sia $G_o(f)$ [$G_o(f)$ funzione pari; $|f|<1$ ciclo/2 unità di tempo], in modo tale che il numero di termini transitori non superi in totale 2M e la rapidità di caduta a zero dalla risposta $\{G_h\}$, corrispondente a passaggi

---

(*) Ricordare che tanto $\{d_{3,M,k}\}$ come $F^+\{q_{3,M,h}\}$ hanno un periodo N, perciò gli indici k si devono pensare definiti a meno di un multiplo intero di N; analogamente $q_{3,M}(h/N)$ ha periodo 1.

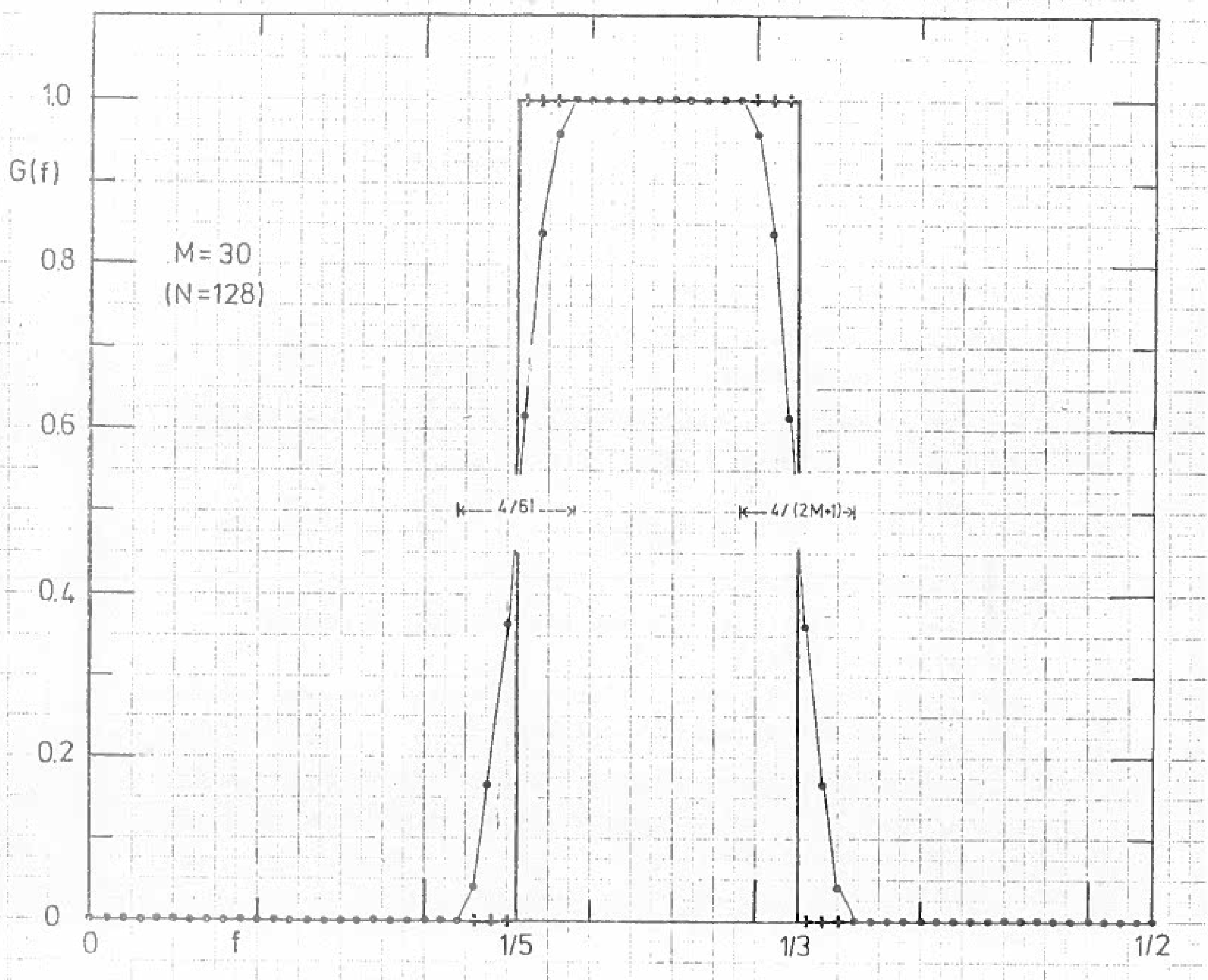

Fig. 4 - Un esempio di calcolo di un filtro passa banda (1/5,1/3) con la condizione di (2M+1)=61 coefficienti e bande di raccordo a zero non superiore a 4/(2M+1). Come si vede fuori dalle bande di raccordo, lo scostamento della risposta dall'ampiezza prevista è impercettibile:

(+) ampiezza della frequenza prestabilita da G(f);

(•) ampiezza della frequenza effettiva di $\{G_h\}$.

al valore zero di $G_o(f)$, non superi l'intervallo di frequenza $4/(2M+1)$, si potrà operare nel modo seguente:(+)

1) Da $G_o(f)$ si ricava: $\{G(h/N);h=0,\pm 1,\ldots,\pm N/2\}$

2) I valori di $G(h/N)$ con indice negativo $(-N/2,\ldots -2,-1)$ si spostano di N posti in modo da avere

$$\{G(h/N);=0,1\ldots,N-1\}$$

3) Si calcola $\{g_{o,k}\}=F^{+}\{G(h/N)\}$

4) Si esegue il prodotto: $\{g'_k\}=\{g_{o,k}d_{3,M,k}\}$ dove $\{d_{3,M,k}\}$ è la finestra di Hamming.

5) Si verifica (se si vuole) l'approssimazione a $G_o(f)$ della risposta $\{G_h\}$ relativa a $\{g'_k\}$ definita da

$$\{G_h\}=F^{-}\{g'_k\}$$

6) A questo punto si può:

   a) operare il filtraggio rapido via TVF se N è potenza intera di 2 e $N\leq 2^{(2M+1)/3}$;
   in questo modo la serie filtrata conterrà M termini transitori all'inizio e M alla fine; oppure:

   b) prendere i primi M+1 termini non nulli di $\{g'_k\}$ e, ponendo $\{g_{-k}=g_k,k=1,2,\ldots M\}$, costruire la serie cercata dei coefficienti del filtro:

$$\{g_k;k=0,\pm 1,\ldots,\pm M\}.$$

(+) Il programma, sia del calcolo dei coefficienti del filtro di data risposta, che del filtraggio via TVF, è disponibile a richiesta.

Notare che per quanto riguarda il calcolo di $\{g_k\}$ da usare con una serie di un numero qualsiasi di dati, non necessita che N sia pari al numero di dati che si devono filtrare, occorre però che detto N sia tale che il numero di termini con cui si può approssimare $G_o(f)$ sia abbastanza grande perchè la definizione di $G_o(f)$ non sia troppo grossolana. In altre parole se ad esempio il numero dei dati da filtrare fosse 2^{15} per il calcolo del filtro si potrebbe benissimo usare anche $N=2^7$ (ved. fig.4).

APPENDICE

In analogia al prodotto di convoluzione tra x(t) e y(t) definito per ogni t reale:

$$z(t)=x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')y(t-t')dt'=\int_{-\infty}^{+\infty} y(-t')x(t+t')dt'$$

si definisce il prodotto di convoluzione discreta tra le due serie $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$:

$$\{z_k\}=\{y_k\}*\{x_k\}=\{\sum_{0}^{N-1}{}_{k'} g_{k'}x_{k-k'}\}=\{\sum_{-N+1}^{0} {}_{k'} g_{-k'}x_{k+k'}\}$$

Occorre notare che questa definizione implica che una delle due serie sia periodica di periodo N ossia che per ogni r intero sia:

$$x_{k+rN} = x_k \quad \text{oppure} \quad y_{k+rN} = y_k .$$

Dimostriamo ora che se

$\{Z_h\}=F^{-}\{z_k\};\{X_h\}=F^{-}\{x_k\};\{Y_h\}=F^{-}\{y_k\}$

e $\{z_k\}=\{x_k\}*\{y_k\}$

allora $\{Z_h\}=\{X_h\}\{Y_h\}$

Infatti, per definizione si trova:

$$\{Z_h\}=\sum_{0}^{N-1}{}_{k} e^{-i2\pi hk/N}\sum_{0}^{N-1}{}_{k'} y_{k'}x_{k-k'}=\sum_{0}^{N-1}{}_{k'} y_{k'}\sum_{0}^{N-1}{}_{k} x_{k-k'}e^{-i2\pi hk/N}$$

ponendo poi k-k'=k" si trova

$$\{Z_h\} = \sum_{0}^{N-1}{}_{k'} y_{k'}\sum_{-k'}^{N-1-k'}{}_{k''} x_{k''}e^{-i2\pi h(k'+k'')/N}$$

e infine tenendo conto che per ogni h, per la periodicità di

$x_{k'}$, gli addendi della seconda sommatoria sono tutti e soli quelli di $\sum_{o}^{N-1} {}_{k''}$ si ottiene:

$$\{Z_h\} = \sum_{o}^{N-1} {}_{k'} \, y_{k'} e^{-i2\pi hk'/N} \sum_{o}^{N-1} {}_{k''} \, x_{k''} e^{-i2\pi hk''/N} = \{Y_h\}\{X_h\}$$

c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

1 - J.W. COOLEY e J.W. TUKEY: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series *
Math. of Comp. 19, 297, 1965.

2 - R.B. BLACKMAN e J.W. TUKEY: The Measurement of Power Spectra *
Dover Publications, Inc., New York, 1958.